Е.В. Борисов

ФИЛОСОФСКАЯ ЛОГИКА

Тема: Формальный язык, интерпретация, валюация переменных, истина

I. Формальный язык

Формальный язык логики предикатов первого порядка включает в себя *вокабуляр* (множество символов) и *синтаксис* (правила составления формул из символов).

А. Вокабуляр формального языка включает в себя следующие категории символов:
1) Индивидные константы: a, b, c,…
2) Индивидные переменные: x, y, z, …
3) Предикаты[1]: P, Q, R, …
4) Логические союзы: ~, &, v, ⊃.
5) Кванторы: ∃, ∀.
6) Вспомогательные символы: скобки и запятая.

Примечания:
1) Индивидные константы и переменные называются *термами.*
2) Как правило, множество индивидных констант и множество индивидных переменных являются счетными[2].
3) Вокабуляр может содержать иные категории символов: символы функций, модальные операторы и т.д.

В. Синтаксис

Выражение – это любая конечная последовательность символов формального языка.
Синтаксис языка выделяет особый вид выражений – формулы.

Атомарная формула – это выражение вида $P(t_1, \ldots, t_n)$, где P – n-местный предикат, а $t_1, \ldots, t_n$ – термы. (Один терм может входить в последовательность $t_1, \ldots, t_n$ несколько раз.)
Примечание: атомарная формула содержит *только* n-местный предикат и n термов; в частности, атомарная формула *не* содержит логических связок и кванторов.

Определение *формулы:*
1. Любая атомарная формула – это формула.
2. Если A и B – формулы, то (~A), (A&B), (AvB) и (A⊃B) – формулы.
3. Если A – формула, а *x* – переменная, то (∃*x*A) и (∀*x*A) – формулы.
4. Других формул нет[3].

[1] Для каждого предиката определена его местность.
[2] Счетное множество равномощно множеству натуральных чисел.
[3] Данное определение формулы является *рекурсивным*, поскольку оно задает а) множество атомарных формул, б) метод построения более сложных формул из более простых.

Примечания.
1) Неформально: формула – это выражение, которое может быть истинным или ложным. Например, выражение &Pvv~aP – *не* формула; выражение (∃xPx) – формула (если P – одноместный предикат).
2) Формулы называются также *предложениями.*
3) Ниже я опускаю внешние скобки формул, например, вместо (A&B) пишу A&B.

Определение подформулы.
Если ~A, ∃xA и ∀xA – формулы, то A является подформулой каждой из них. Если A&B, AvB и A⊃B – формулы, то A и B – подформулы каждой из них. Кроме того, любая формула является своей подформулой (A – подформула A).

Пример: если A, B и C – атомарные формулы, то в (AvB)⊃~C имеется 6 подформул.

Свободные и связанные вхождения переменных в формуле.

Пусть A – формула, а x – переменная. Тогда в формуле ∀xA A – это *область действия* квантора ∀x; в формуле ∃xA A – *область действия* квантора ∃x.

Переменная может иметь несколько вхождений в одной формуле; например, в формуле ∀x(Pz ⊃ Rxy) & ∃yRyx: x и y имеют по 3 вхождения; z имеет 1 вхождение.

Если вхождение переменной v в формуле Φ непосредственно следует за знаком квантора или находится в области действия квантора ∀v или ∃v, то данное вхождение v в Φ называется *связанным*. Если вхождение переменной v в Φ не является связанным, оно называется *свободным*.
Например, в формуле ∀x(Pz ⊃ Rxy) & ∃yRyx:
- первое и второе вхождения x связаны; третье вхождение x свободно;
- первое вхождение y свободно; второе и третье связаны;
- единственное вхождение z свободно.

Нотация.
Пусть Φ – формула, а t - терм. Мы можем обозначить Φ как Φ(x). Тогда Φ(t) – это результат замены всех свободных вхождений переменной x в Φ термом t. Примеры:
- обозначим ∀x(Pz ⊃ Rxy) & ∃yRyx как Φ(x). Тогда Φ(t) = ∀x(Pz ⊃ Rxy) & ∃yRyt;
- обозначим ∀x(Pz ⊃ Rxy) & ∃yRyx как Φ(y). Тогда Φ(w) = ∀x(Pz ⊃ Rxw) & ∃yRyt.

Альтернативная нотация.
Пусть Φ – формула. Тогда Φ^{t}_{x} – результат замены всех свободных вхождений переменной x в Φ термом t.

II. Интерпретация

Интерпретация формального языка L определенным образом соотносит L с некоторым множеством объектов – *доменом.* В результате термы L приобретают денотат, а формулы L приобретают истинностное значение.

Определение интерпретации.
Интерпретация I языка L на домене D – это функция, которая:
1) каждой индивидной константе L ставит в соответствие некоторый элемент D,
2) каждому n-местному предикату L ставит в соответствие n-местное отношение на D.
Иначе говоря:
1) если a – индивидная константа, то $I(a) \in D$;
2) если P – n-местный предикат, то $I(P) \subseteq D^n$.

Терминология:
1) если a – индивидная константа, то объект I(a) называется *денотат* a*;*
2) если P – предикат, то I(P) называется *экстенсионал* P;
3) если $<x_1, \dots x_n> \in I(P)$, то принято говорить: $<x_1, \dots x_n>$ *выполняет* P; отношение между кортежами длины n и n-местными предикатами называется *выполнением;*
4) если D – непустое множество объектов, а I – интерпретация языка L на D, то упорядоченная пара <D, I> называется *модель* для L.

III. Валюация переменных

Определение валюации переменных.
Валюация переменных языка L в модели <D, I> – это функция, назначающая каждой переменной L объект в D, т.е. функция из множества переменных L в D.

Иллюстрация. Пусть язык L содержит переменные x, y и z, пусть домен модели M – это множество чисел. В таблице даны три валюации – v_1, v_2 и v_3:

Переменные	v_1	v_2	v_3
x	7	14	–12
y	15	2	–12
z	–3	14	–12

Примечания:
1) Нетрудно видеть: $v_1(x) = 7$; $v_2(x) = v_2(z) = 14$; $v_3(x) = v_3(y) = v_3(z) = –12$.
2) Нетрудно видеть, что предложение «$y \leq z$» ложно при v_1, но истинно при v_2 и v_3.

Упражнение. Используя переменные x, y и z, составьте:
- предложение, истинное при v_1 и v_2, но ложное при v_3;
- предложение, истинное при v_1 и v_3, но ложное при v_2;
- предложение, истинное при всех трех валюациях;
- предложение, ложное при всех трех валюациях.

Определение x-варианта валюации.
Валюация w является *x-вариантом валюации v*, если и только если для любой переменной y: если $y \neq x$, то $w(y)=v(y)$.
Иначе говоря: x-вариант валюации переменных v – это валюация переменных, которая если отличается от v, то только относительно x.

Иллюстрация

Переменные	Валюоации		
	v	v′	v″
x	7	9	7
y	2	2	7
z	15	15	15

v′ – это x-вариант v;
v″ – это y-вариант v;
v″ *не* является φ-вариантом v′ для какой-либо переменной φ.

Примечания.
1) Отношение «быть x-вариантом» симметрично: если w – x-вариант v, то v – x-вариант w.
2) Любая валюация является φ-вариантом себя самой для любой переменной φ. Например, v является своим собственным x-вариантом, y-вариантом и z-вариантом.

Нотация для вариантов валюаций. Пусть w – x-вариант v, такой что w(x) = a. Тогда w обозначается как v[a/x]. Например, v′ = v[9/x]; v″ = v[7/y].
Примечания:
1) v″ = v′[7/x][7/y].
2) Для любых v, x, a: v[a/x](x) = a.
3) Для любых v, x, a, b: v[a/x][b/x] = v[b/x].

IV. Денотация и истина

Денотаты термов некоторого языка L и истинностные значения формул L зависят от моделей и валюаций переменных. Ниже предполагается:

- L – некоторый формальный язык;
- M = <D, I> – некоторая модель для L (D – домен, I – интерпретация);
- v – некоторая валюация переменных L в M.

A. Денотация в модели

Функцию, назначающую термам денотаты, будем обозначать как vI. Эта функция определяется через I и v. Пусть t – терм; тогда:

- если t – переменная, то vI(t) = v(t);
- если t – константа, vI(t) = I(t).

B. Истина

Нотация:
$M \vDash_v A \quad =_{df}$ формула A истинна в модели M при валюации переменных v.
$M \nvDash_v A \quad =_{df}$ формула A неистинна в модели M при валюации переменных v.
тттк $=_{df}$ тогда и только тогда, когда.

Понятие ***истины в модели*** является центральным понятием формальной семантики.

Определение истины в модели[4]

1. Если P – n-местный предикат, а $t_1, \ldots t_n$ – термы, то:
$M \vDash_v P(t_1, \ldots t_n)$ тттк $<vI(t_1), \ldots vI(t_n)> \in I(P)$.

2. $M \vDash_v {\sim}A$ тттк $M \nvDash_v A$.

3. $M \vDash_v A\&B$ тттк $M \vDash_v A$ и $M \vDash_v B$.

4. $M \vDash_v AvB$ тттк $M \vDash_v A$ или $M \vDash_v B$.

5. $M \vDash_v A \supset B$ тттк: если $M \vDash_v A$, то $M \vDash_v B$.

6. $M \vDash_v (\exists x)A$ тттк для некоторого $o \in D$: $M \vDash_{v[o/x]} A$.

7. $M \vDash_v (\forall x)A$ тттк для каждого $o \in D$: $M \vDash_{v[o/x]} A$.

Данное понятие позволяет определить условия истинности любой формулы относительно любой модели и любой валюации переменных.

Пример определения истинностных условий. Рассмотрим арифметическое предложение $\forall x \exists y(x>y)$. Пусть $M = <D, I>$, где D – множество действительных чисел, а предикат > имеет стандартный экстенсионал. Определим условия истинности этого предложения относительно модели M и произвольной валюации v (в квадратных скобках указываются использованные пункты дефиниции истины):

$M \vDash_v \forall x \exists y(x>y)$ тттк
для каждого $a \in D$, $M \vDash_{v[a/x]} \exists y(x>y)$ [7] тттк
для каждого $a \in D$, для некоторого $b \in D$, $M \vDash_{v[a/x][b/y]} (x>y)$ [6] тттк
для каждого $a \in D$, для некоторого $b \in D$, $<v[a/x][b/y](x), v[a/x][b/y](y)> \in I(>)$ [1] тттк
для каждого $a \in D$, для некоторого $b \in D$, $<a, b> \in I(>)$.
Примечание. При определении истинностных условий формулы A мы:
1) применяя пункты 2-7 дефиниции истины, избавляемся от всех логических операторов (союзов и кванторов) и доходим до атомарных формул;
2) применяем пункт 1 дефиниции истины к атомарным формулам и получаем истинностные условия A для данных модели и валюации.

Упражнение. Докажите следующие положения:
1) истинностное значение формулы $\exists xR(x, y)$ зависит от валюации переменных (т.е. при фиксированной модели данная формула может быть истинной при одной валюации и ложной при другой);
2) истинностное значение формулы $\exists xPx$ не зависит от выбора валюации (т.е. при фиксированной модели эта формула имеет одно и то же истинностное значение для всех валюаций);
3) выражение $\exists x \forall xPx$ является формулой;
4) формулы $\exists x \forall xPx$ и $\forall xPx$ эквивалентны (т.е. их истинностные значения совпадают относительно любой модели и валюации).

[4] Дефиниция является рекурсивной, поскольку: а) задает условия истинности для атомарных формул, б) показывает, как условия истинности сложных формул зависят от условий истинности их подформул.

Что нужно запомнить
Тезаурус: вокабуляр формального языка, синтаксис формального языка, атомарная формула, формула, подформула, область действия квантора, вхождение переменной в формулу, свободные и связанные схождения переменных в формулы, домен, интерпретация, модель, денотат, экстенсионал, выполнение, валюоация переменных, x-вариант валюоации переменных, денотация в модели, истина в модели.
Нотация: $\Phi(x)$, Φ^t_x, <D, I>, $v[a/x]$, vI, $M \vDash_v A$, $M \nvDash_v A$, тттк.

Литература
Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М., 1976. Глава 2, §§ 1, 2. С. 53-64.
Новиков П.С. Математическая логика и основания математики. М., 1973. Глава 3, §§ 1-3. С. 123-136.
Partee B. et al. Mathematical Methods in Linguistics. Dordrecht, 1987. Part B, Chapter 7. P. 137-180.