

# Аспекты неклассических логик: упражнения

В.В. Долгоруков (НИУ ВШЭ)

2 июня 2021 г.

## 1 Модальная логика

### 1.1 Модальные исчисления

**Упражнение 1.1.** *Какие из следующих принципов следует принять или отвергнуть (с точки зрения интуиции):*

- |                                                                      |                                                       |
|----------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| 1. $\Box(p \wedge q) \equiv (\Box p \wedge \Box q)$                  | 8. $p \rightarrow \Box \Diamond p$                    |
| 2. $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$   | 9. $\Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$           |
| 3. $(\Diamond p \wedge \Diamond q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$ | 10. $\Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond p$     |
| 4. $\Box p \rightarrow p$                                            | 11. $\Box(\Box p \rightarrow p)$                      |
| 5. $\Box p \rightarrow \Diamond p$                                   | 12. $\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$   |
| 6. $\neg \Box \perp$                                                 | 13. $\Box p \rightarrow \Box \Diamond \Box p$         |
| 7. $\Box p \rightarrow \Box \Box p$                                  | 14. $\Diamond \Box \Diamond p \rightarrow \Diamond p$ |

если модальный оператор « $\Box \dots$ » интерпретировать как (a) «необходимо, что ...», (b) «обязательно, что ...», (c) «всегда будет, что ...», (d) «агент  $x$  знает, что ...», (e) «агент  $x$  считает, что ...», (f) «существует доказательство, что...», (g) «хорошо, что ...»? Как будет читаться двойственный оператор  $\Diamond p := \neg \Box \neg p$  в каждом из этих случаев?

**Упражнение 1.2.** *Докажите в исчислении  $K$  следующие теоремы:*

1.  $\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box q$
2.  $\Box p \rightarrow \Box(p \vee q)$
3.  $\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$
4.  $(\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$
5.  $\Diamond(p \vee q) \equiv (\Diamond p \vee \Diamond q)$
6.  $\Diamond(p \wedge q) \rightarrow \Diamond p$
7.  $(\Box p \rightarrow \Diamond q) \equiv \Diamond(p \rightarrow q)$
8.  $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Diamond p \rightarrow \Diamond q)$
9.  $(\Diamond p \wedge \Box(p \rightarrow q)) \rightarrow \Diamond q$
10.  $(\Box p \wedge \Diamond q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$
11.  $\Box(p \vee q) \rightarrow (\Diamond p \vee \Box q)$
12.  $(\Diamond p \wedge \Box q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$

**Упражнение 1.3** (\*). Докажите в исчислении  $K$  следующие теоремы:

1.  $(\Box p \rightarrow \Diamond(q \rightarrow r)) \rightarrow (\Box q \rightarrow (\Box p \rightarrow \Diamond r))$
2.  $(\Box p \wedge \Diamond(q \rightarrow r)) \rightarrow (\Box(p \rightarrow q) \rightarrow \Diamond(p \wedge r))$

**Упражнение 1.4** (\*). Методом индукции докажите, что

$$\vdash_K \Box(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \equiv (\Box \varphi_1 \wedge \dots \wedge \Box \varphi_n) \text{ для любого } n \geq 2$$

**Упражнение 1.5.** Докажите в исчислении  $KT$  следующие теоремы:

1.  $\Box \Box p \rightarrow \Box p$
2.  $\Box p \rightarrow \Diamond p$
3.  $\neg \Box \perp$
4.  $\Diamond(p \rightarrow \Box p)$

**Упражнение 1.6.** Докажите в исчислении  $S4$  следующие теоремы:

1.  $\Box \Box p \equiv \Box p$
2.  $\Diamond \Diamond p \equiv \Diamond p$
3.  $\Box^n p \equiv \Box p^1$
4.  $\Diamond^n p \equiv \Diamond p$
5.  $\Box p \rightarrow \Box \Diamond \Box p$
6.  $\Diamond \Box \Diamond p \rightarrow \Diamond p$
7.  $\Box \Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond p$
8.  $\Box \Diamond \Box p \rightarrow \Diamond \Box p$
9.  $\Diamond \Box p \rightarrow \Diamond \Box \Diamond p$

**Упражнение 1.7.** Докажите, что в  $S4$  «четырёхэтажные» модальности  $\Box \Diamond \Box \Diamond$  и  $\Diamond \Box \Diamond \Box$  редуцируются к более простым.

**Упражнение 1.8.** В каких логических отношениях находятся следующие модальности в логике  $S4$ :  $\Box \Diamond \Box$ ,  $\Diamond \Box \Diamond$ ,  $\Box \Diamond$ ,  $\Diamond \Box$ ,  $\Box$ ,  $\Diamond$ ? Докажите.

**Упражнение 1.9** (\*). Докажите следующие теоремы:

---

<sup>1</sup>Здесь степень означает, что оператор повторяется  $n$  раз. Например,  $\Box^3 := \Box \Box \Box$ .

1.  $\vdash_{KT5} p \rightarrow \Box \Diamond p$
2.  $\vdash_{KT5} \Box p \rightarrow \Box \Box p$
3.  $\vdash_{KT4B} \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$
4.  $\vdash_{KB4} \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$
5.  $\vdash_{KB5} \Box p \rightarrow \Box \Box p$
6.  $\vdash_{KD4B} \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$
7.  $\vdash_{KD5B} \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$
8.  $\vdash_{K5} \Box(\Box p \vee q) \rightarrow (\Box p \vee \Box q)$
9.  $\vdash_{K5} (\Diamond p \wedge \Diamond q) \rightarrow \Diamond(\Diamond p \wedge q)$
10.  $\vdash_{S5} \Box(\Box p \vee q) \equiv (\Box p \vee \Box q)$
11.  $\vdash_{S5} (\Diamond p \wedge \Diamond q) \equiv \Diamond(\Diamond p \wedge q)$
12.  $\vdash_{K4} \Box(\Diamond p \vee q) \rightarrow (\Diamond p \vee \Box q)$
13.  $\vdash_{K4} (\Box p \wedge \Diamond q) \rightarrow \Diamond(\Box p \wedge q)$
14.  $\vdash_{S5} \Box(\Diamond p \vee q) \equiv (\Diamond p \vee \Box q)$
15.  $\vdash_{S5} (\Box p \wedge \Diamond q) \equiv \Diamond(\Box p \wedge q)$
16.  $\vdash_{S5} \Box(\Box p \rightarrow q) \vee \Box(\Box q \rightarrow p)$

**Упражнение 1.10** (\*\*). Докажите, что

$$\vdash_{K5} \Box(\Box p \rightarrow p)$$

**Упражнение 1.11** (\*\*). Рассмотрим логику

$$S4.3 = S4 + (\Box(\Box p \vee q) \wedge \Box(p \vee \Box q)) \rightarrow (\Box p \vee \Box q).$$

Докажите, что  $\vdash_{S4.3} \Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond p$ .

## 1.2 Семантика Крипке

**Упражнение 1.12.** Укажите какие формулы выполняются в каких мирах в модели  $\mathcal{M}_1$  (см.: Рис.1).<sup>2</sup>

**Упражнение 1.13.** Укажите какие формулы выполняются в каких мирах в модели  $\mathcal{M}_2$  (см.: Рис.2).

**Упражнение 1.14.** Укажите какие формулы выполняются в каких мирах в модели  $\mathcal{M}_3$  (см.: Рис.3).

**Упражнение 1.15.** Найдите формулу, которая различает модели  $(\mathcal{M}_4, w_1)$  и  $(\mathcal{M}_5, w_1)$ . См.: Рис.4.

**Упражнение 1.16.** Найдите формулу, которая различает модели  $(\mathcal{M}_6, w_1)$  и  $(\mathcal{M}_7, w_1)$ . См.: Рис.5.

**Упражнение 1.17.** Постройте модели для следующих формул в логике K:

<sup>2</sup>Онлайн-тренажер с аналогичными упражнениями тут:  
<http://pacuit.io/modal/tutorial/>.

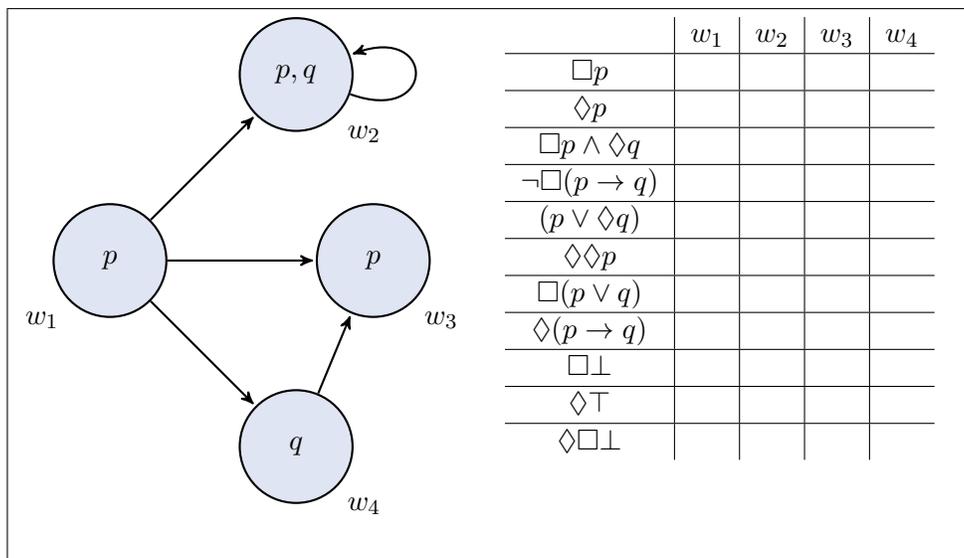


Рис. 1: Модель  $M_1$

- |                                                                    |                                                 |
|--------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| 1. $\Diamond p \wedge \Diamond q \wedge \neg \Diamond(p \wedge q)$ | 5. $\Box \perp$                                 |
| 2. $\Box p \wedge \neg \Box \Box p$                                | 6. $\Diamond \Box \perp \wedge \neg \Box \perp$ |
| 3. $\Box p \wedge \neg p$                                          | 7. $\neg \Box \perp \wedge \Box \Box \perp$     |
| 4. $p \wedge \neg \Box p$                                          | 8. $\Diamond p \wedge \Diamond \Box \perp$      |

**Упражнение 1.18.** Постройте контрмодели для следующих формул в логике S4:

- |                                                  |                                                       |
|--------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| 1. $\Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$      | 4. $\Box \Diamond p \rightarrow \Box \Box \Diamond p$ |
| 2. $\Box \Diamond p \rightarrow \Diamond \Box p$ | 5. $\Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond \Box p$ |
| 3. $\Diamond \Box p \rightarrow \Box \Diamond p$ | 6. $\Diamond p \rightarrow \Diamond \Box \Diamond p$  |

**Упражнение 1.19 (\*).** Используя схему Скотта-Леммона, найдите ограничение на достижимость для следующих схем:

- |                                               |                                         |
|-----------------------------------------------|-----------------------------------------|
| 1. $\Box p \rightarrow \Box \Box p$           | 3. $\Diamond \Box p \rightarrow \Box p$ |
| 2. $\Box \Box p \rightarrow \Box \Box \Box p$ | 4. $\Diamond p \rightarrow \Box p$      |

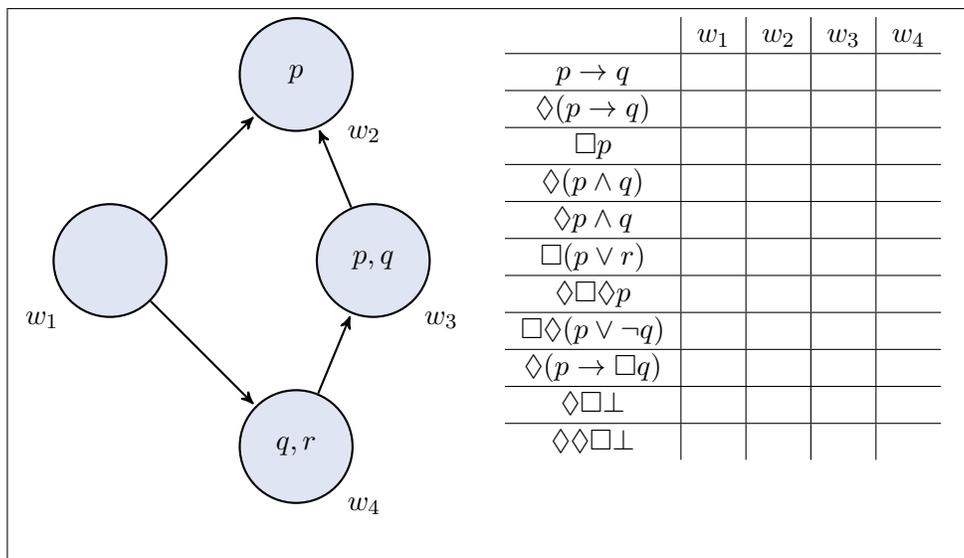


Рис. 2: Модель  $M_2$

## 2 Расширения модальной логики

### 2.1 2D семантика

**Упражнение 2.1.** Приведите пример интерпретации и выберите высказывание, которое было бы истинно (a) только в одной строке, (b) только в одном столбце, (c) только по диагонали и (d) во всех ячейках таблицы.

### 2.2 Модальная логика предикатов

**Упражнение 2.2.** Рассмотрим две формулы:

$$(a) \exists x\Box P(x) \text{ и } (b) \Box\exists xP(x)$$

- (1) Какая из них соответствует модальности *de re*, а какая — *de dicto*?
- (2) Если « $\Box$ » интерпретировать как «известно, что...», а « $P(x)$ » как « $x$  — убийца», то в чем заключается содержательное различие между этими формулами? (3) В каком логическом отношении находятся указанные формулы?

**Упражнение 2.3.** Рассмотрим следующие формулы:

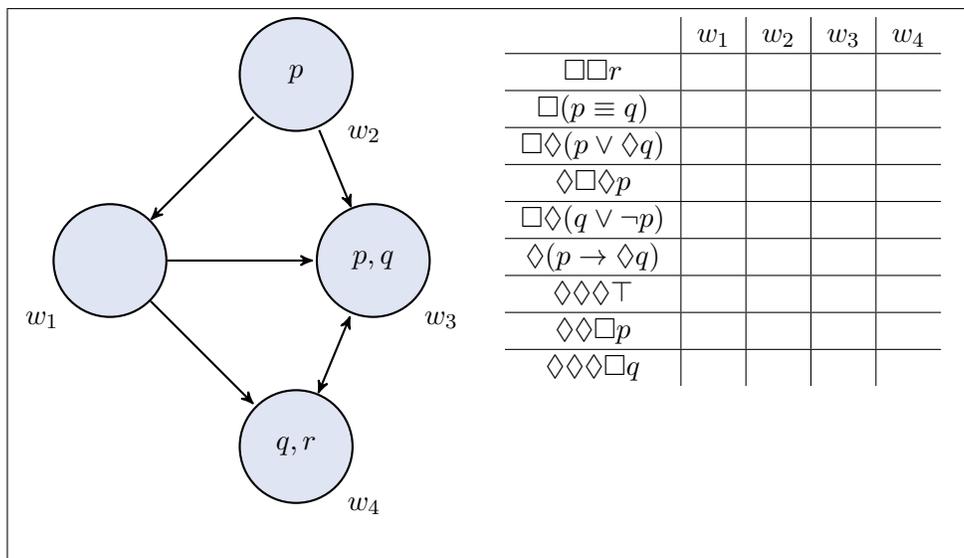


Рис. 3: Модель  $\mathcal{M}_3$

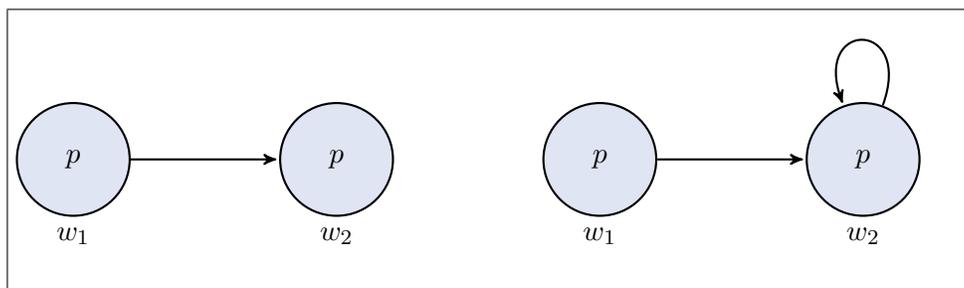
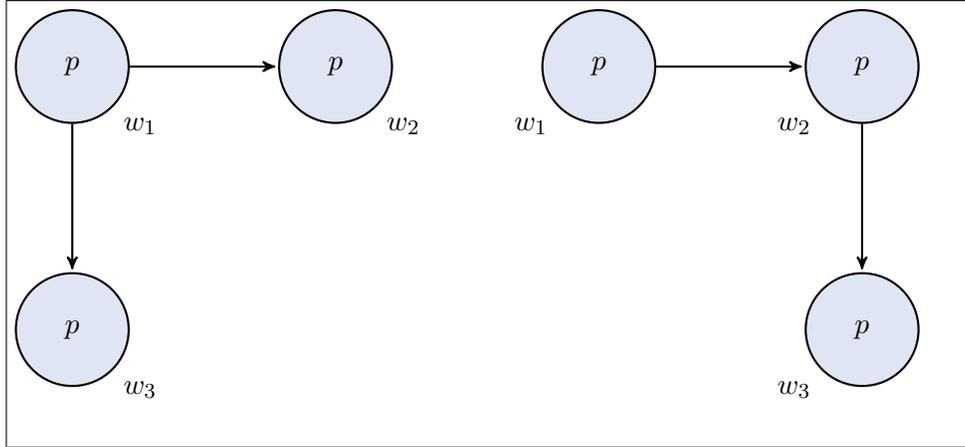


Рис. 4: Модели  $(\mathcal{M}_4, w_1)$  и  $(\mathcal{M}_5, w_1)$

- |                                                               |                                                               |
|---------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| 1. $\Box\forall xP(x) \rightarrow \forall x\Box P(x)$         | 5. $\Diamond\exists xP(x) \rightarrow \exists x\Diamond P(x)$ |
| 2. $\forall x\Box P(x) \rightarrow \Box\forall xP(x)$         | 6. $\exists x\Diamond P(x) \rightarrow \Diamond\exists xP(x)$ |
| 3. $\Diamond\forall xP(x) \rightarrow \forall x\Diamond P(x)$ | 7. $\Box\exists xP(x) \rightarrow \exists x\Box P(x)$         |
| 4. $\forall x\Diamond P(x) \rightarrow \Diamond\forall xP(x)$ | 8. $\exists x\Box P(x) \rightarrow \Box\exists xP(x)$         |

Укажите: (a) вхождение модальности *de re* и *de dicto*; (b) какие формулы являются двойственными друг другу; (c) какие из формул являются «формулами Баркан»; (d) какие формулы можно считать логическими законами (с точки зрения интуиции).

**Упражнение 2.4.** Рассмотрим исчисление  $FOI_K$  (к исчислению для



**Рис. 5:** Модели  $(M_6, w_1)$  и  $(M_7, w_1)$

классической логики предикатов  $FOL$  добавляются аксиомы и правила вывода минимальной модальной логики  $K$ ). Докажите в этом исчислении следующие теоремы:

1.  $\exists x \Box P(x) \rightarrow \Box \exists x P(x)$
2.  $\Diamond \forall x P(x) \rightarrow \forall x \Diamond P(x)$
3.  $\exists x \Diamond P(x) \rightarrow \Diamond \exists x P(x)$
4.  $\Box \forall x P(x) \rightarrow \forall x \Box P(x)$

**Упражнение 2.5.** Постройте контрмодели для следующих формул:

1.  $\Box \exists x P(x) \rightarrow \exists x \Box P(x)$
2.  $\forall x \Diamond P(x) \rightarrow \Diamond \forall x P(x)$

**Упражнение 2.6.** Докажите в исчислении  $FOL_K$

1.  $a = b \rightarrow \Box(a = b)$
2.  $\Diamond(a \neq b) \rightarrow a \neq b$

Каковы метафизические следствия указанных законов?

**Упражнение 2.7.** Докажите в исчислении  $FOL_{KB}$

1.  $\Diamond(a = b) \rightarrow a = b$
2.  $a \neq b \rightarrow \Box(a \neq b)$

Каковы метафизические следствия указанных законов?

### 3 Временная логика

#### 3.1 $K_t$ и ее расширения

**Упражнение 3.1.** Найдите доказательства для следующих теорем:

1.  $\vdash_{K_t} H(p \wedge q) \rightarrow Hp$
2.  $\vdash_{K_t} G(p \wedge q) \rightarrow (Gp \wedge Gq)$
3.  $\vdash_{K_t} FHp \rightarrow GPr$
4.  $\vdash_{K_t} PGp \rightarrow HFr$

**Упражнение 3.2.** Постройте временные модели, которые различаются следующей формулой (в логике  $K_t$ ):

1.  $Fp \wedge \neg Gp$
2.  $Pp \wedge \neg HPr$
3.  $Hp \wedge \neg H(p \wedge q)$
4.  $PFp \wedge \neg Fp$
5.  $PFp \wedge \neg Pr$
6.  $PFp \wedge \neg Pr \wedge \neg Fp$
7.  $Gp \wedge Hp \wedge \neg p$
8.  $p \wedge H\neg p \wedge GPr$
9.  $HGr$
10.  $Gp$
11.  $FGp$
12.  $GFr$
13.  $GHp$
14.  $Hp$
15.  $PHp$
16.  $HPr$
17.  $Fp \wedge \neg GFr$
18.  $GFr \wedge \neg FGp$
19.  $FGp \wedge \neg Gp$
20.  $Gp \wedge \neg HGr$
21.  $HPr \wedge \neg PHp$
22.  $PHp \wedge \neg Hp$
23.  $Hp \wedge \neg GHp$
24.  $G\perp \vee FG\perp$

**Упражнение 3.3** (\*). Постройте временные модели, которые различаются следующей формулой (в логике  $K_t$ ):

1.  $Pp \wedge \neg PPr$
2.  $Fp \wedge \neg FFp$
3.  $(p \wedge Gp) \rightarrow PGp$
4.  $(p \wedge Hp) \rightarrow FHp$
5.  $H\neg p \wedge \neg p \wedge FGp \wedge F\neg p \wedge GPr$
6.  $G\neg p \wedge \neg p \wedge PHp \wedge P\neg p \wedge HFr$

**Упражнение 3.4** (\*). Найдите доказательства для следующих теорем логики  $K_t$ :

1.  $GPGp \rightarrow GGPp$
2.  $GPGp \equiv Gp$
3.  $Gp \rightarrow GPr$
4.  $HFHp \rightarrow Hp$
5.  $HFHp \equiv Hp$
6.  $Hp \rightarrow HFr$

**Упражнение 3.5** (\*\*). Рассмотрим логику:

$$K_t + FGp \rightarrow GFr + PHp \rightarrow HPr$$

Докажите, что  $GHp \equiv HGr$  – теорема этой логики.

**Упражнение 3.6** (\*\*\*) . Докажите, что

$$K_t + Gp \rightarrow GGp = K_t + Hp \rightarrow HHp$$

**Упражнение 3.7 (\*\*\*)**. Рассмотрим следующую логику:

$$Q_t = K_t + (4) + (Lin_F) + (Lin_P) + (Dens) + (NoEnd) + (NoBeg),$$

где:

$$\begin{aligned} (4) & \quad Gp \rightarrow GGp \text{ или } Hp \rightarrow HHp \\ (Lin_F) & \quad (Fp \wedge Fq) \rightarrow (F(p \wedge q) \wedge F(p \wedge Fq) \wedge F(Fp \wedge q)) \\ (Lin_P) & \quad (Pp \wedge Pq) \rightarrow (P(p \wedge q) \wedge P(p \wedge Pq) \wedge P(Pp \wedge q)) \\ (Dens) & \quad GGp \rightarrow Gp \text{ или } HHp \rightarrow Hp \\ (NoEnd) & \quad Gp \rightarrow Fp \\ (NoBeg) & \quad Hp \rightarrow Pp \end{aligned}$$

1. Рассмотрим Таблицу 1, которая описывает редукцию «трехэтажных» модальностей в логике  $Q_t$ . В таблице строки соответствуют первому оператору, столбцы — второму и третьему, ячейка — результату редукции. Например, первая ячейка описывает следующую редукцию:  $PGH \equiv GH$ .

Заметим, что таблица описывает некоторые закономерности. Например,  $\circ GH \equiv GH$ , где  $\circ \in \{G, H, P, F\}$ , то есть, если цепочка модальных операторов заканчивается сочетанием  $GH$ , то любой оператор, стоящий перед этим сочетанием, может быть удален.

Глядя на эту таблицу, сформулируйте полное правило редукции модальных операторов в логике  $Q_t$ .<sup>3</sup>

2. Найдите доказательства для всех теорем, соответствующих описываемым таблицей редукциям:  $\vdash_{Q_t} PGHp \equiv GHp$ ,  $\vdash_{Q_t} PFHp \equiv PHp$  и т.д.

**Упражнение 3.8 (\*\*)**. Найдите доказательства для импликативных теорем в логике  $Q_t$ , см.: Рис. 6. Для «отсутствующих» импликаций постройте контрмодели.

**Упражнение 3.9 (\*)**. Выразите монадические темпоральные операторы  $G\varphi$ ,  $H\varphi$ ,  $F\varphi$ ,  $P\varphi$  через диадические  $U\varphi\psi$  и  $S\varphi\psi$ .<sup>4</sup>

<sup>3</sup>Подсказка-1: попробуйте использовать альтернативную нотацию:  $\square := G$ ,  $\square^- := H$ ,  $\diamond := F$ ,  $\diamond^- := P$ ; подсказка-2: докажите, что  $GH \equiv HG$  и  $FP \equiv PF$ .

<sup>4</sup>Подсказка от У.Х. Одена:

	$GH$	$FH$	$PH$	$HP$	$GP$	$FP$	$HF$	$GF$	$FG$	$PG$
$P$	$GH$	$PH$	$PH$	$HP$	$P$	$FP$	$FP$	$GF$	$FG$	$PG$
$H$	$GH$	$H$	$PH$	$HP$	$HP$	$FP$	$HF$	$GF$	$FG$	$HG$
$F$	$GH$	$FH$	$PH$	$HP$	$FP$	$FP$	$F$	$GF$	$FG$	$FG$
$G$	$GH$	$GH$	$PH$	$HP$	$GP$	$FP$	$GF$	$GF$	$FG$	$G$

Таблица 1: Редукция «трехэтажных» модальностей в логике  $Q_t$ .

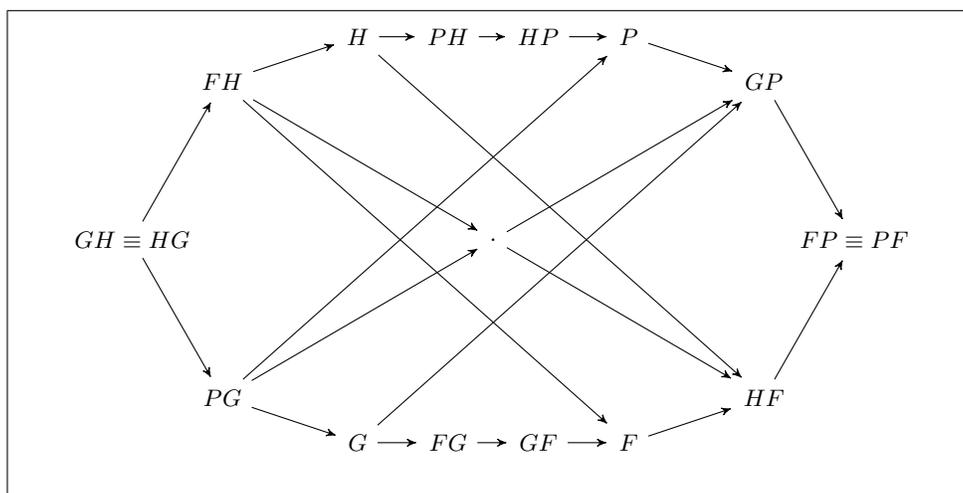


Рис. 6: 15 модальностей логики  $Q_t$ .

### 3.2 Логика ветвящегося времени (оккамистская)

**Упражнение 3.10.** Постройте модели (в логике ветвящегося времени) для следующих формул:

1.  $Fp \wedge \neg \Box Fp$
2.  $\Diamond Fp \wedge G\neg p$
3.  $P\Diamond p \wedge \neg \Diamond p$
4.  $P\Diamond p \wedge G\neg p$
5.  $P\Diamond p \wedge \Box G\neg p$
6.  $P\Diamond Fp \wedge \neg p \wedge \Box G\neg p$
7.  $H\Diamond Gp \wedge \neg p \wedge \Box G\neg p$
8.  $\neg(\Diamond p \rightarrow (Pp \vee p \vee Fp))$

---

*I'll love you, dear, I'll love you.  
Till China and Africa meet,  
And the river jumps over the mountain.  
And the salmon sing in the street.*

**Упражнение 3.11** (\*). Докажите (семантически), что формула

$$P\varphi \rightarrow \Box P\Diamond\varphi$$

общезначаима.

**Упражнение 3.12** (\*). Какие из формул общезначаимы в логике ветящегося времени. Докажите.

1.  $P\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond P\varphi$
2.  $\Diamond P\varphi \rightarrow P\Diamond\varphi$
3.  $G\Box\varphi \rightarrow \Box G\varphi$
4.  $\Box G\varphi \rightarrow G\Box\varphi$
5.  $\Diamond P\varphi \rightarrow \Box P\Diamond\varphi$
6.  $\varphi \rightarrow \Box P\Diamond F\varphi$
7.  $\Diamond\varphi \rightarrow \Box P\Diamond F\varphi$

**Упражнение 3.13** (\*\*). Выведите следующую формулу из аксиом логики *K.t*, аксиом *S5* для  $\Box$  и аксиомы неветвления в прошлое  $P\varphi \rightarrow \Box P\Diamond\varphi$

$$G\Box\varphi \rightarrow \Box G\varphi$$

## 4 Деонтическая логика

**Упражнение 4.1.** Сформулируйте: (1) парадокс Росса, (2) парадокс Прайора, (3) парадокс «доброго самаритянина», (4) парадокс Чиззоляма, (5) закон Канта.

**Упражнение 4.2.** Постройте доказательство для формулы, соответствующей парадоксу Росса (логика *K*).

**Упражнение 4.3.** В каких логических отношениях находятся следующие формулы (*KD*):  $O_p$ ,  $P_p \wedge P\neg p$ ,  $O\neg p$ ,  $P_p$ ,  $P\neg p$ ,  $O_p \vee O\neg p$ ?

**Упражнение 4.4.** Осуществите редукцию Андерсона для следующих формул: (1)  $F_p \wedge O_q$ , (2)  $F(p \wedge q) \wedge P_p \wedge P_q$ .

## 5 STIT-логика

**Упражнение 5.1.** Постройте модели для следующих формул:

1.  $[cstit]_{ap} \wedge \neg[cstit]_{bp}$
2.  $[cstit]_{ap} \wedge \neg[cstit]_{aq}$
3.  $[cstit]_{ap} \wedge \neg[dstit]_{ap}$
4.  $[dstit]_{ap} \wedge \neg[dstit]_a(p \vee q)$
5.  $[dstit]_a(p \wedge q) \wedge \neg[dstit]_{ap}$
6.  $\neg[cstit]_{ap} \wedge \diamond[cstit]_{ap}$
7.  $[cstit]_{abp} \wedge \neg([cstit]_{ap} \vee [cstit]_{bp})$
8.  $Op \wedge \neg O[cstit]_{ap}$

**Упражнение 5.2 (\*)**. Постройте модели для следующих формул:

1.  $[cstit]_{abc}p \wedge \neg([cstit]_{ab}p \vee [cstit]_{bc}p \vee [cstit]_{ac}p)$
2.  $\neg[cstit]_{ab}p \wedge \neg\diamond[cstit]_{ap} \wedge \neg\diamond[cstit]_{bp} \wedge \diamond[cstit]_{ab}p$
3.  $Op \wedge \diamond[cstit]_{ap} \wedge \neg O[cstit]_{ap}$
4.  $O[cstit]_{abc}p \wedge \neg(O[cstit]_{ab}p \vee O[cstit]_{bc}p \vee O[cstit]_{ac}p)$

## 6 Эпистемическая логика

### 6.1 Эпистемическая логика (статическая)

**Упражнение 6.1.** Построить модель для следующих формул:

1.  $p \wedge \neg K_a p$
2.  $K_a p \wedge \neg K_a q$
3.  $K_a p \wedge \neg K_b p$
4.  $K_a p \wedge \neg K_a q \wedge K_b q \wedge \neg K_b p$

**Упражнение 6.2.** Построить модель для следующих формул (или доказать, что это невозможно)

- |                                                                             |                                                                              |
|-----------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $\neg K_a \varphi \wedge K_b \varphi$                                    | 8. $K_a K_b \varphi \wedge \neg K_a \varphi$                                 |
| 2. $\neg K_a \varphi \wedge \varphi$                                        | 9. $K_a K_b \varphi \wedge \neg K_b K_a \varphi$                             |
| 3. $K_a \varphi \wedge \neg \varphi$                                        | 10. $K_b K_a \varphi \wedge K_a K_b \varphi \wedge \neg K_a K_b K_a \varphi$ |
| 4. $\hat{K}_a \varphi \wedge \neg \varphi$                                  | 11. $E_{ab} p \wedge K_a K_b p \wedge \neg K_b K_a p$                        |
| 5. $K_a \varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg K_a \psi$     | 12. $E_{ab} p \wedge \neg K_a K_b p \wedge \neg K_b K_a p$                   |
| 6. $K_a \varphi \wedge K_a (\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg K_a \psi$ | 13. $E_{ab}^2 p \wedge K_a K_b K_a p \wedge \neg K_b K_a K_b p$              |
| 7. $\hat{K}_a \varphi \wedge \hat{K}_a \neg \varphi$                        | 14. $E_{ab}^2 p \wedge \neg K_a K_b K_a p \wedge \neg K_b K_a K_b p$         |

**Упражнение 6.3.** Постройте модель, которая бы наилучшим образом описывала следующую ситуацию:

1. На столе лежит конверт, в котором возможно лежит письмо (пусть  $p :=$  «в конверте лежит письмо»). Ни Аня, ни Борис не знают, есть ли конверт или нет.
2. Аня и Борис вместе открывают конверт.
3. Аня на глазах Бориса открывает конверт, но не показывает его содержимое Борису.
4. Борис вышел в другую комнату, а затем вернулся. За это время Аня могла посмотреть содержимое конверта.
5. Сначала Борис вышел в другую комнату и вернулся, а потом Аня вышла в другую комнату и вернулась. Каждый из них мог открыть конверт.

**Упражнение 6.4.** Найдите формулы, которые различают модели в упражнении 6.3.<sup>5</sup> Используйте оператор общего знания  $S_{ab}$ .<sup>6</sup>

**Упражнение 6.5.** Постройте модели, которые бы различались следующей формулой:

1.  $V_a p \wedge \neg p$
2.  $V_a p \wedge \neg K_a p \wedge p$

<sup>5</sup>Важно, что речь идет именно о модели, а не *отмеченной* модели, то есть, формула должна выполняться в модели целиком (в каждом из миров этой модели).

<sup>6</sup>Также удобно использовать следующее сокращение:  $K_i^? \varphi := K_i \varphi \vee K_i \neg \varphi$ .

3.  $\neg B_a p \wedge \neg B_a \neg p$
4.  $\neg B_a p \wedge \neg B_a q \wedge B_a(p \rightarrow q)$
5.  $\neg K_a q \wedge B_a q \wedge \neg B_a p \wedge \neg B_a \neg p$
6.  $\neg K_a^? p \wedge \neg K_b^? p \wedge B_a p \wedge B_b \neg p$
7.  $K_a p \wedge \neg K_a^? q \wedge B_a q \wedge K_b q \wedge \neg K_b^? p \wedge B_b \neg p$
8.  $\neg K_a^? p \wedge \neg K_b^? p \wedge \neg B_a p \wedge \neg B_a \neg p \wedge B_b K_a p$
9.  $\neg K_a^? p \wedge \neg K_b^? p \wedge B_a p \wedge B_b p \wedge B_b B_a \neg p$
10.  $\neg K_a^? p \wedge \neg K_b^? p \wedge B_a p \wedge B_b p \wedge B_b(\neg B_a \neg p \wedge \neg B_a p)$
11.  $\neg K_a^? p \wedge \neg K_b^? p \wedge B_a p \wedge B_b \neg p \wedge B_b B_a \neg p \wedge B_a B_b p$
12.  $\neg B_a^q p \wedge B_a(q \rightarrow p)$

**Упражнение 6.6.** Постройте модели для выполнимых формул, для невыполнимых – докажите, что это невозможно:

- |                                                                              |                                                                       |
|------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| 1. $E_{abc}\varphi \wedge \neg K_a K_b \varphi$                              | 13. $C_{abp} \wedge C_{acp} \wedge C_{bcp} \wedge \neg C_{abc} p$     |
| 2. $E_{ab}\varphi \wedge \neg E_{ab}^2 \varphi$                              | 14. $B_a K_a \varphi \wedge B_a \neg \varphi$                         |
| 3. $D_{ab}\varphi \wedge \neg K_a \varphi \wedge \neg K_b \varphi$           | 15. $B_a^p r \wedge B_a^q r \wedge \neg B_a^{p \wedge q} r$           |
| 4. $C_{ab}\varphi \wedge \neg K_c \varphi$                                   | 16. $\neg B_a^p r \wedge B_a^{p \wedge q} r$                          |
| 5. $E_{ab}^2 \varphi \wedge \neg C_{ab}\varphi$                              | 17. $\neg B_a^\psi \varphi \wedge B_a(\psi \rightarrow \varphi)$      |
| 6. $\hat{K}_a \varphi \wedge \neg \varphi$                                   | 18. $B_a^\psi \varphi \wedge \neg B_a(\psi \rightarrow \varphi)$      |
| 7. $K_a \varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg K_a \psi$      | 19. $B_a^+ \varphi \wedge B_a^s \varphi$                              |
| 8. $K_a \varphi \wedge K_a(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg K_a \psi$   | 20. $B_a^+ \varphi \wedge \neg B_a^s \varphi$                         |
| 9. $\hat{K}_a \varphi \wedge \hat{K}_a \neg \varphi$                         | 21. $\neg B_a^+ \varphi \wedge B_a^s \varphi$                         |
| 10. $K_a K_b \varphi \wedge \neg K_a \varphi$                                | 22. $\neg B_a^+ \varphi \wedge \neg B_a^s \varphi \wedge B_a \varphi$ |
| 11. $K_a K_b \varphi \wedge \neg K_b K_a \varphi$                            | 23. $B_a^s p \wedge B_a^s q \wedge \neg B_a^s(p \wedge q)$            |
| 12. $K_b K_a \varphi \wedge K_a K_b \varphi \wedge \neg K_a K_b K_a \varphi$ | 24. $\neg B_a^s p \wedge B_a^s(p \wedge q)$                           |

**Упражнение 6.7 (\*\*).** Вспомните сказку о новом платье короля. Какая формула наилучшим образом описывает эту ситуацию?

**Упражнение 6.8 (\*\*\*)**. Какие аксиомы (из набора  $K, T, D, B, 4, 5$ ) являются корректными для операторов « $K_i$ », « $K_i^?$ », « $B_i^+$ », « $B_i^s$ », « $B_i^\psi$ »? Докажите. При помощи кругов Эйлера укажите в каких отношениях находятся множества всех моделей, в которых истинна формула  $\Box p$ , где  $\Box$  – один из указанных операторов.

**Упражнение 6.9 (\*\*\*)**. Постройте модель, которая бы наилучшим образом описывала ситуацию аналогичную ситуации в 6.3.5 только с тремя агентами – Аня, Борис и Семен. Агенты выходят по одному, оставшиеся два агента всегда действуют вместе, что является общим знанием для всех троих.

**Упражнение 6.10 (\*)**. Постройте модель, которая бы наилучшим образом описывала следующую ситуацию:

Аня рассказала Борису страшный секрет, Борис рассказал его Семену, но попросил Семена не говорить Ане о факте их разговора. Семен рассказал Ане, что Борис попросил не говорить ей о факте его разговора с ним.

Знает ли Аня, что Семен знает, что Борис знает, что Аня знает страшный секрет?

**Упражнение 6.11 (\*\*\*)**. Экономист А. Бранденбургер и математик Х. Кайслер сформулировали интересный парадокс – следующее сочетание доклатических установок невозможно:

«Ann believes that Bob assumes that Ann believes that Bob's assumption is wrong».<sup>7</sup>

Попытайтесь средствами эпистемической и доклатической логики продемонстрировать парадоксальность данного высказывания.

## 6.2 Динамическая эпистемическая логика

**Упражнение 6.12.** При помощи динамической эпистемической логики решите следующую задачу:

---

<sup>7</sup>См.: Brandenburger A., Keisler H.J. An Impossibility Theorem on Beliefs in Games // Studia Logica. 2006. Vol. 84, № 2. P. 211–240.

Аня, Борис и Семен вернулись с прогулки. Папа им говорит: хотя бы у одного из вас чумазый лоб. Сейчас я Вам буду задавать вопросы, тот, кто догадается чумазый он или нет – должен всем сказать, что он догадался (но не говорить какой он).

1. Папа: «Кто-то из вас знает, чумазый он или нет?»

Дети: «Нет!»

Папа: «А теперь?»

Аня: «Я знаю!»

Борис: «И я знаю!»

Семен: «Ну тогда все понятно: я - . . . !»

Чумазый Семен или нет? А Борис и Аня? Как они догадались?

2. Папа: «Кто-то из вас знает, чумазый он или нет?»

Дети: «Нет!»

Папа: «А теперь?»

Дети: «Нет!»

Папа: «А теперь?»

Дети: «Да!»

Как они догадались?

**Упражнение 6.13.** При помощи динамической эпистемической логики решите следующую задачу:

Альберт и Бернард только что познакомились с Шерил, и захотели узнать, когда у нее день рождения. Шерил перечислила список из 10 возможных дат:

- 15 мая
- 16 мая
- 19 мая
- 17 июня
- 18 июня
- 14 июля
- 16 июля
- 14 августа
- 15 августа
- 17 августа.

Потом Шерил сказала Бернарду только день ее рождения, а Альберту – месяц.

*«Я не знаю, когда у Шерил день рождения, но я точно знаю, что  
Бернард тоже не знает», — сказал Альберт.*

*«Сначала я не знал, когда у Шерил день рождения, но теперь я знаю»,  
— возразил Бернард.*

*На это Альберт ответил: «Тогда я тоже знаю, когда у Шерил День  
рождения».*

*Когда же у Шерил день рождения?*

**Упражнение 6.14** (\*\*). *При помощи динамической эпистемической  
логики решите следующую задачу:*

*В баре сидят трое логиков. Официантка спрашивает у них : «Все  
будут пиво?».*

*Первый логик: «Я не знаю!».*

*Второй логик: «Я не знаю!».*

*Третий логик: «Да!».*

*Как они рассуждали?*

**Упражнение 6.15** (\*\*). *При помощи динамической эпистемической  
логики решите следующую задачу:*

*Ведущий объявляет двум незнакомцам Эбби и Барри: «Вы знаете  
день недели, в который вы родились, но не день недели, в который ро-  
дился другой. Тем не менее, я могу сказать вам, что вы родились в  
смежные дни, и что Барри не родился в понедельник.» Затем он про-  
должает спрашивать Эбби и Барри поочередно, могут ли они вывести,  
какой день недели другой человек родился и получает такие ответы:*

*Эбби: «Нет».*

*Барри: «Нет».*

*Эбби: «Нет».*

*Барри: «Нет».*

*Эбби: «Нет».*

*В какой день недели родилась Эбби?*

**Упражнение 6.16** (\*\*). При помощи динамической эпистемической логики решите следующую задачу:

Альберт, Бернард и Шерил подружились с Денисом, и захотели узнать, когда у него День Рождения. Денис дал им список из 20 возможных дат:

- 17 Февраля 2001
- 18 Февраля 2004
- 11 Апреля 2003
- 16 Марта 2002
- 13 Апреля 2001
- 14 Июля 2004
- 13 Января 2003
- 14 Мая 2002
- 17 Июня 2001
- 19 Января 2004
- 14 Марта 2003
- 16 Августа 2002
- 13 Марта 2001
- 19 Мая 2004
- 16 Июля 2003
- 15 Апреля 2002
- 15 Мая 2001
- 16 Июля 2003
- 16 Февраля 2003
- 12 Июня 2002
- 18 Августа 2004

Затем Денис сказал Альберту, Бернарду и Шерил отдельно месяц, день и год рождения соответственно. Между ними состоялся следующий разговор:

Альберт: «Я не знаю, когда у Дениса День Рождения, но я знаю, что Бернард не знает».

Бернард «Я до сих пор не знаю, когда у Дениса День Рождения, но я знаю, что Шерил все еще не знает».

Шерил: «Я до сих пор не знаю, когда у Дениса День Рождения, но я знаю, что Альберт до сих пор не знает».

Альберт: «Теперь я знаю, когда у Денса День Рождения».

Бернард: «Теперь я тоже знаю».

Шерил: «Я тоже знаю».

Итак, когда День Рождения Дениса?

**Упражнение 6.17** (\*\*). Составьте новую задачу по типу задачи о Дне Рождения Шерил.

**Упражнение 6.18.** Опишите результат информационного обновления модели, см.: Рис. 7:

- |                               |                                              |                               |
|-------------------------------|----------------------------------------------|-------------------------------|
| 1. $\mathcal{M}^{\uparrow p}$ | 3. $\mathcal{M}^{\uparrow(p \wedge q)}$      | 5. $\mathcal{M}^{\uparrow p}$ |
| 2. $\mathcal{M}^{\uparrow q}$ | 4. $\mathcal{M}^{\uparrow(p \rightarrow q)}$ | 6. $\mathcal{M}^{\uparrow p}$ |

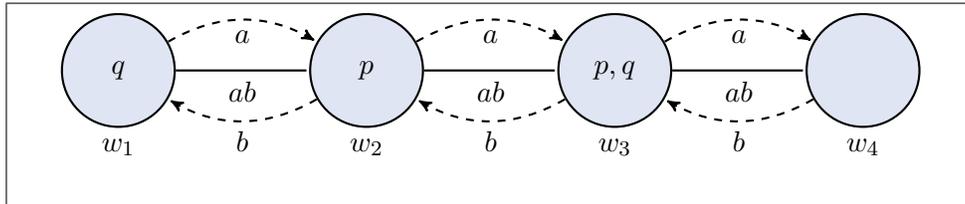


Рис. 7: Информационное обновление

**Упражнение 6.19.** Опишите результат информационного обновления модели, см.: Рис. 8:

- |                               |                               |
|-------------------------------|-------------------------------|
| 1. $\mathcal{M}^{\uparrow p}$ | 3. $\mathcal{M}^{\uparrow p}$ |
| 2. $\mathcal{M}^{\uparrow q}$ | 4. $\mathcal{M}^{\uparrow p}$ |

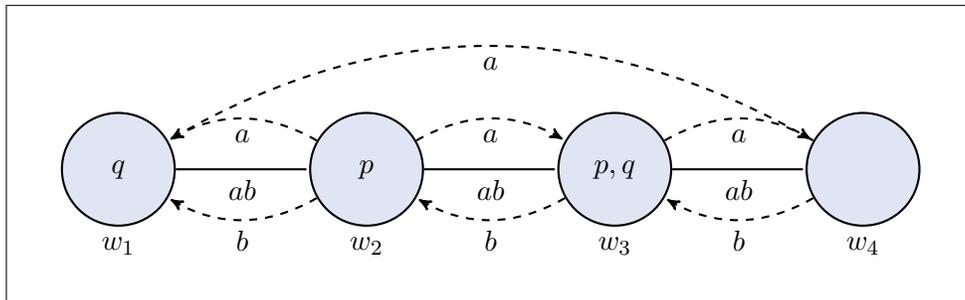


Рис. 8: Информационное обновление

**Упражнение 6.20 (\*\*).** Динамическая эпистемическая логика обладает следующим интересным свойством: для любой формулы динамической эпистемической логики можно найти эквивалентную ей формулу статической эпистемической логики, пользуясь следующими аксиомами редукции:

- $[\!|\varphi]p \equiv (\varphi \rightarrow p)$ , где  $p$  – пропозициональная переменная
- $[\!|\varphi]\neg\psi \equiv \varphi \rightarrow \neg[\!|\varphi]\psi$
- $[\!|\varphi](\psi \wedge \chi) \equiv [\!|\varphi]\psi \wedge [\!|\varphi]\chi$

- $[\!|\varphi]K_i\psi \equiv \varphi \rightarrow K_i[\!|\varphi]\psi$

Найдите результат редукции для следующих формул:

- |                         |                       |                                    |
|-------------------------|-----------------------|------------------------------------|
| 1. $[\! p](q \wedge r)$ | 3. $[\! p](q \vee r)$ | 5. $[\! K_ap](q \wedge r)$         |
| 2. $[\! K_ap]K_bq$      | 4. $[\! p]K_a^?q$     | 6. $[\! \neg K_ap]K_b(q \wedge r)$ |

## 7 Многозначные логики

**Упражнение 7.1.** Являются ли указанные формулы законами трехзначной логики Лукасевича?

- |                                    |                                                                      |
|------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| 1. $\neg(p \wedge \neg p)$         | 4. $p \rightarrow (p \vee \neg p)$                                   |
| 2. $p \vee \neg p$                 | 5. $(p \wedge \neg p) \rightarrow p$                                 |
| 3. $p \rightarrow (q \vee \neg q)$ | 6. $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$ |

## 8 Интуиционистская логика

**Упражнение 8.1.** Какие из указанных формул НЕ являются законами интуиционистской логики высказываний? (Постройте для таких формул контрмодели).

- |                                                                 |                                                                 |
|-----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| 1. $\neg\neg p \rightarrow p$                                   | 12. $(\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)$ |
| 2. $p \rightarrow \neg\neg p$                                   | 13. $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p)$ |
| 3. $p \vee \neg p$                                              | 14. $\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$         |
| 4. $\neg p \vee \neg\neg p$                                     | 15. $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg(p \wedge q)$         |
| 5. $\neg(p \wedge \neg p)$                                      | 16. $\neg(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q)$         |
| 6. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg p \vee q)$              | 17. $(p \wedge q) \rightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$         |
| 7. $(\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$              | 18. $\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$         |
| 8. $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge \neg q)$        | 19. $(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow \neg(p \vee q)$         |
| 9. $(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg(p \rightarrow q)$        | 20. $\neg(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow (p \vee q)$         |
| 10. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ | 21. $(p \vee q) \rightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$         |
| 11. $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$ | 22. $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$           |

**Упражнение 8.2** (\*). Найдите результат перевода в  $S4$  для следующих формул интуиционистской логики высказываний:

1.  $\neg p$

3.  $p \wedge \neg q$

5.  $p \rightarrow \neg\neg p$

2.  $\neg\neg p$

4.  $p \rightarrow q$

6.  $\neg\neg p \rightarrow p$